**Sprawozdanie z listy 4. – Modele systemów dynamicznych L**

Filip Antoniak (279929)

1. **Wstęp**

Celem tego sprawozdania jest przeprowadzenie analizy prawa stygnięcia Newtona z wykorzystaniem narzędzi dostępnych w Pythonie. Rozwiązanie analityczne będzie porównane z numerycznym co pozwoli określić błędy oraz wyciągnąć odpowiednie wnioski.

1. **Prawo stygnięcia Newtona**

Prawo stygnięcia Newtona opisuje, jak temperatura ciała zmienia się w czasie, gdy jest ono w kontakcie z otoczeniem o stałej temperaturze, innymi słowy z jaką szybkością ciała przekazują sobie energię cieplną w wyniku przewodnictwa ciepła. Prawo to sformułował Izaak Newton.

Warto zaznaczyć, że prawo to nie obowiązuje, gdy energia przekazywana jest poprzez promieniowanie, gdy towarzyszy temu zjawisku zmiana stanu, bądź jak w przypadku układu Lorenza – gdy występuje konwekcja energii cieplnej.

Prawo to określone jest wzorem:

gdzie:

T(t) można obliczyć, m.in. korzystając z całkowania, bądź transformaty laplace’a. Tr oraz k są traktowane jako wartości stałe. Wykonując transformatę laplace’a:

Teraz wykonując odwrotną transformate Laplace’a:

Ostatecznie T(t) wynosi:

Ze względu na założenie, żeest stałe, należy zaznaczyć, że pomieszczenie, w którym wykonywany jest eksperyment musi być odpowiednio duże, aby warunek ten mógł zostać spełniony.

Za przyjęta zostanie wartość 20 [stopni Celsjusza]

Badając prawo stygnięcia należy obrać odpowiednią stałą wartość k. Na potrzeby tego sprawozdania stała k zostanie ustalona na poziomie:

*[1/s]*

*[1/min]*

Co według eksperymentów[[1]](#footnote-1) odpowiada wartości jaką otrzymamy badając stygnięcie wody podgrzewanej w czajniku w kolbie pomiarowej.

Warunek początkowy zostanie ustawiony na wartość 100 [stopni Celsjusza] aby symulować wrzenie wody w czajniku.

1. **Obliczenia sympy / scipy**

Rozwiązania dokładne (analityczne) wykonane w sympy

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 1: Kod użyty do rozwiązania równania metodą sympy.

Ostatecznie kod zwraca rozwiązanie równania różniczkowego, które jest zgodne z uzyskanym poprzez transformatę Laplace’a

Przybliżenia rozwiązania (numeryczne) wykonane w scipy

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 2: Kod użyty do rozwiązania równania metodą scipy.integrate.

Metoda numeryczna z wykorzystaniem scipy generuj przebieg symulacji równania różniczkowego.

Efekt wywołania kodu realizacji stygnięcia Newtona przedstawiony jest na Rysunku 3.

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 3: Wykres rezultatu symulacji stygnięcia Newtona dla k=0.0732, Tr=20, T0=100, dt=7/10

1. **Porównanie rozwiązania analitycznego z numerycznym**

**Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie**

Rysunek 4: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt = 1) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR​ = 20°C, a początkowa temperatura T0​ wynosi 100°C.

Na podstawie tego zestawienia (Rysunek 4.) zostały obliczone błędy:

Średni błąd bezwzględny (**MAE**): 0.00754120176980944

Średni błąd kwadratowy (**MSE**): 0.00014640978920346637

Ich wartości są na tyle małe, że dla omawianego równania różniczkowego, użyta metoda nie miałaby większego znaczenia w przypadku rzeczywistych badań. Fakt ten, potwierdza to, że metody numeryczne mogą być równie skuteczne co dokładne metody analityczne.

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, numer

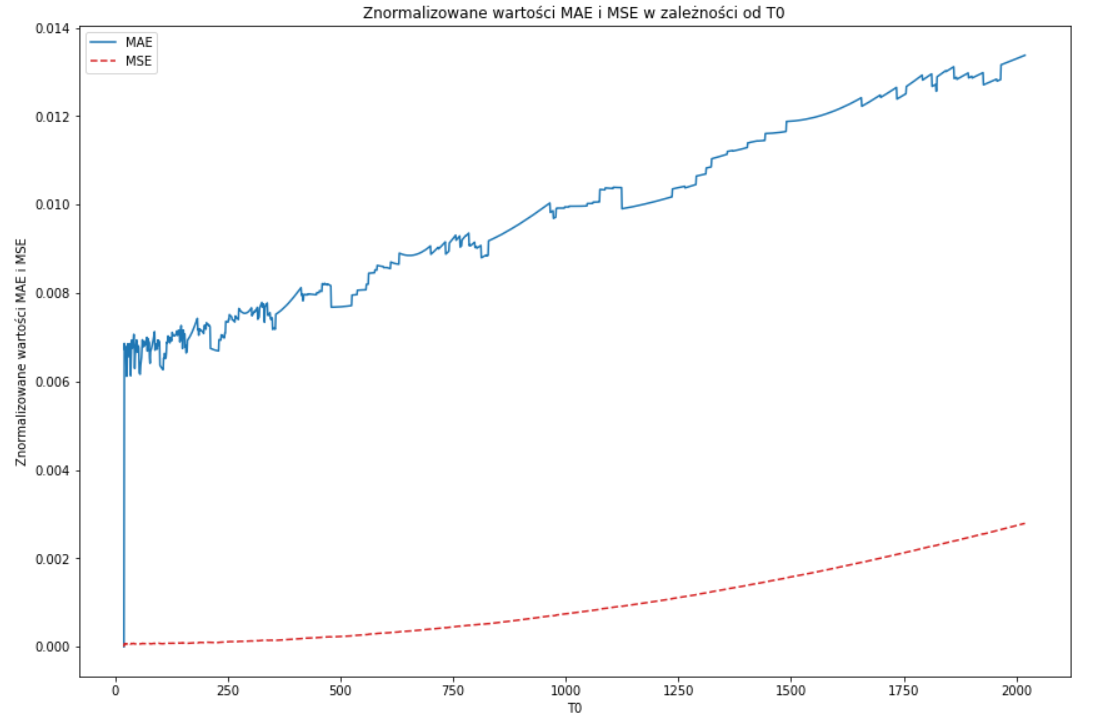
Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 5: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt = 1) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 1, temperatura otoczenia TR = 20°C, a początkowa temperatura T0 wynosi 100°C.

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 6: Zestawienie błędu MAE i MSE w zależności od k na przedziale k od 0 do 1 z krokiem k = 0.001.



Rysunek 7: Zestawienie błędu MAE i MSE w zależności od T0 na przedziale T0 od 20 do 2000 z krokiem T0 = 1. Dla parametrów opisanych we wcześniejszych symulacjach.

Rysunek 6. Przedstawiający zależność błędów od stałej k, pokazuje, że na przedziale wartości k [0, 1], błędy (pomimo nieznacznie większych wartości w okolicy k = 0), utrzymywały się na niskim poziomie.

Rysunek 7. Obrazujący zależność błędów MAE i MSE od wartości początkowej (Temperatury startowej) przy założeniu, że T0 > TR, pokazuje, że istnieje zależność błędów, które rosną w stosunkowo wolnym tempie, względem wzrostu różnicy temperatur. Oznacza to, że nawet dla bardzo dużych temperatur T0 błędy obliczeniowe uzyskiwane przez metody numeryczne wciąż pozostają marginalne.

**Obraz zawierający linia, tekst, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie**

*Rysunek 8: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.01, temperatura otoczenia TR​ = 20°C, a początkowa temperatura T0​ wynosi 100°C.*

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 9: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR​ = 20°C, a początkowa temperatura T0​ wynosi 1,000,000°C.

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 10: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt=1) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR​ = 20°C, a początkowa temperatura T0​ wynosi 20.5°C.

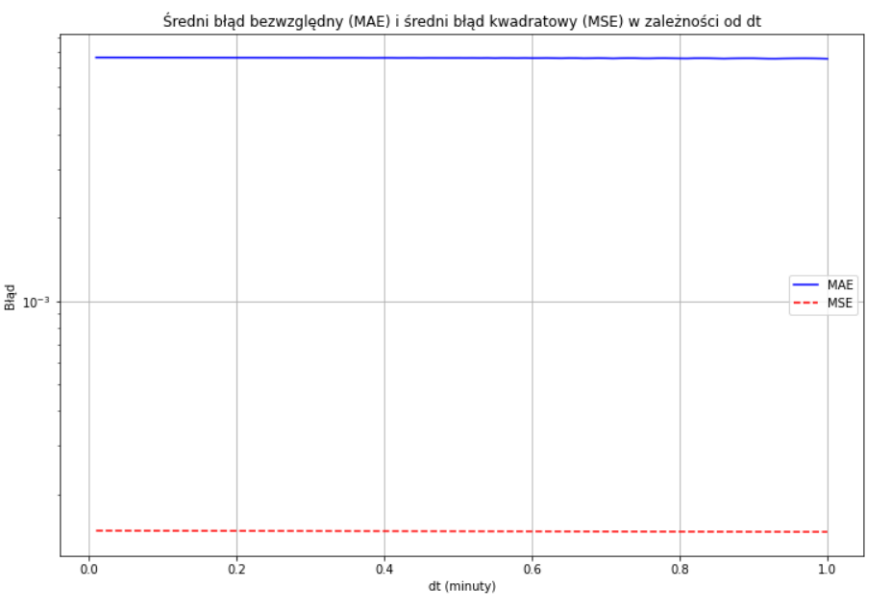
Sytuacja z Rysunku 10. pokazuje, że błąd zaczyna być widoczny, gdy różnica temperatur otoczenia oraz T0 są małe. Pokrywa się to z wynikami z badania z Rysunku 7. Należy zauważyć, że błąd rośnie minimalnie dla rosnącej różnicy temperatur, oznacza to, że dla różnicy bliskiej 0 błąd jest podobny do tego przy znacznie większej różnicy. Z tego wynika, że gdy różnice są małe, to pomimo małego błędu jest on widoczny na wykresie.

Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 11: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt=1) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR = 20°C, a początkowa temperatura T0 wynosi 20.1°C.

Gdy różnica temperatur zbliża się do 0, rośnie błąd względny co widać jako niepokrywające się linie na wykresie z Rysunku 11. Opisane sytuacje dotyczą kroku dt = 1 dla rozwiązań numerycznych. Należy rozważyć też sytuacje, gdy krok dt się zmniejszy:



Rysunek 12: Zestawienie błędu MAE i MSE w zależności od dt na przedziale dt od 0.01 do 1 z krokiem dt = 0.01.

Rysunek 12. Pozwala postawić hipotezę, że metoda numeryczna scipy.integrate nie wykazuje błędów zależnych od wielkości kroku dt. Mija się to jednak z prawdą, ponieważ do obliczenia wartości błędów MAE i MSE potrzebna jest identyczna liczba kroków w obydwóch metodach, a ustawienie tego samego kroku dla obydwóch metod falsyfikuje wynik.

Hipotezę tę obala także Rysunek 11. gdzie, widoczna jest rozbieżność między omawianymi metodami.

Obraz zawierający linia, tekst, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

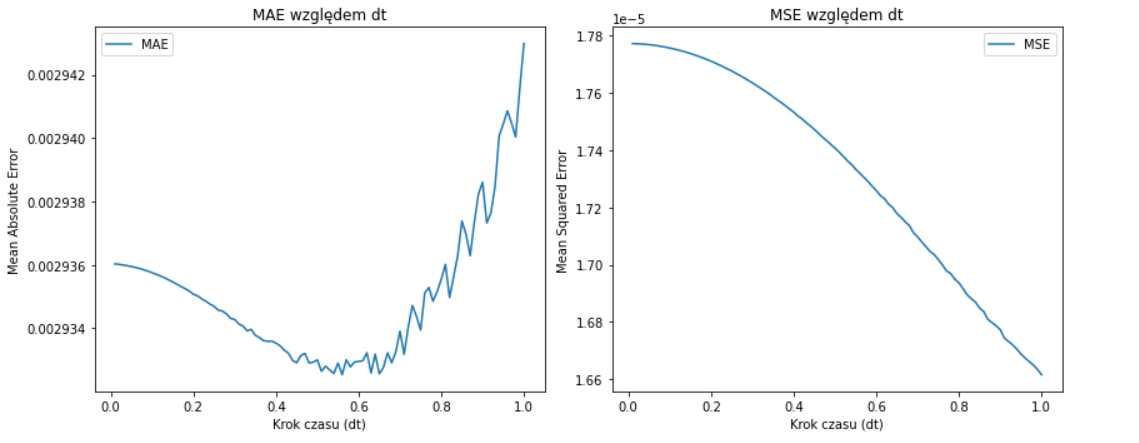
Rysunek 13: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt=5) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR = 20°C, a początkowa temperatura T0 wynosi 25°C.

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

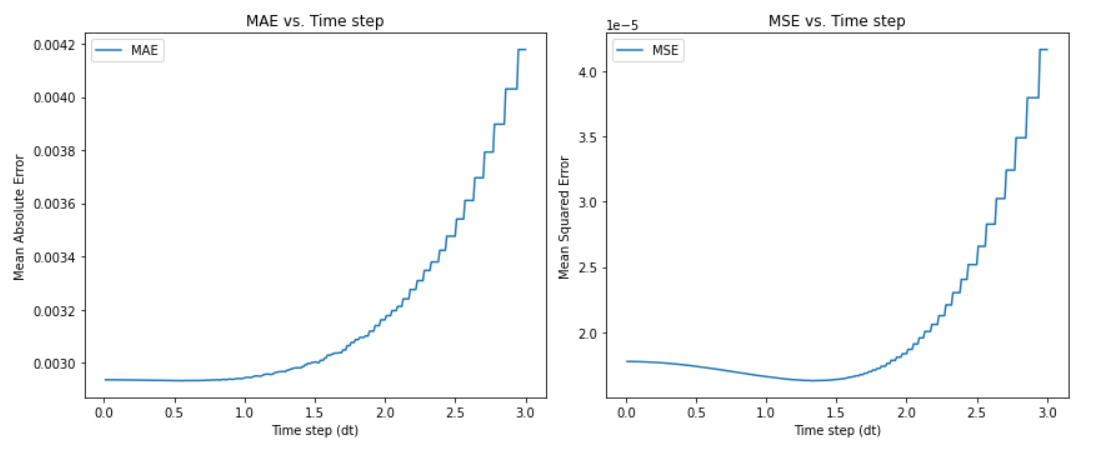
Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 14: Zestawienie rozwiązania analitycznego i numerycznego (dt=5) równania stygnięcia Newtona. Współczynnik stygnięcia k wynosi 0.0732, temperatura otoczenia TR = 20°C, a początkowa temperatura T0 wynosi 25°C.

Sytuację tę obrazują Rysunki 13. i 14. gdzie pokazana jest różnica między zastosowaniem takiego samego kroku (dt=5) dla oby dwóch metod.



Rysunek 15: Prawidłowy wykres błędów MAE i MSE zależnie od dt dla parametrów używanych wcześniej. Krok w zakresie od 0 do 1 ze zmianą ddt 0.01.



Rysunek 16: Prawidłowy wykres błędów MAE i MSE zależnie od dt dla parametrów używanych wcześniej. Krok w zakresie od 0 do 3 ze zmianą ddt 0.01.

Po zinterpolowaniu danych z metody scipy prawidłowe błędy MAE i MSE widoczne są na Rysunku 15. i 16.

Wskazuje to na bezpośredni wpływ dokładności metody numerycznej scipy.integrate względem metody analitycznej sympy. Im większy krok dt tym bardziej wyniki metody scipy odbiegają od rzeczywistości.

1. **Wnioski**

Na podstawie badań opisanych w tym sprawozdaniu można stwierdzić, że metody numeryczne (scipy.integrate) w przypadku rozwiązywania równania opisującego proces stygnięcia Newtona mogą być bardzo dokładne. Wykazały to analizy błędów MAE i MSE, które mogą być utrzymane na niskim poziomie.

* Wpływ kroku dt:

Wielkość kroku dt, wybranego do metod numerycznych ma duży wpływ na dokładność rozwiązań a najlepsze rezultaty są osiągane dla najmniejszych wartości kroku dt

* Wpływ parametru k:

W okolicy k bliskiego 0 błędy były największe mimo to wciąż bardzo niewielkie. Dla większych wartości błąd rośnie minimalnie.

* Wpływ warunku początkowego (równoznaczny z wpływem różnicy temperatur)

Błędy rosną podwajając swoją wartość na przedziale 2000 stopni Celsjusza różnicy względem różnicy bliskiej 0. Blisko 0 wartość MAE wynosi 0.006 co pokazuje znikomy wpływ różnicy temperatur na dokładność metod numerycznych w opisywanym równaniu.

* Interpolacja wartości scipy.integrate

Aby odpowiednio obliczyć błędy konieczne jest zinterpolowanie punktów obliczonych przez metody numeryczne dla dużych kroków.

1. [Wyznaczanie ciepła właściwego cieczy metodą ostygania](https://sparrow.up.poznan.pl/kfb/sites/default/files/u51/c5.pdf) [↑](#footnote-ref-1)